

Cătălin-Daniel Căraușu

George-Florin Șerban

MATEMATICĂ STANDARD

Algebră • Geometrie

Clasa a VIII-a

Partea I. Modulele 1, 2

EDITURA
COMPER

Cuprins

Teste de evaluare inițială	3
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

Capitolul 1. Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	9
Lecția 2. Intervale de numere reale.....	15
Lecția 3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ (\leq , $<$, $>$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	20
<i>Test de evaluare sumativă</i>	24

Capitolul 2. Calcul algebric în \mathbb{R}

Lecția 1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea. Reducerea termenilor asemenea	26
Lecția 2. Operații cu numere reale reprezentate prin litere. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere.....	29
Lecția 3. Formule de calcul prescurtat. Binomul sumă. Binomul diferență	33
Lecția 4. Formule de calcul prescurtat. Diferența pătratelor (produs de sumă prin diferență)	36
Lecția 5. Descompunerea în factori. Metoda factorului comun.....	39
Lecția 6. Descompunerea în factori. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat	43
Lecția 7. Descompunerea în factori. Gruparea termenilor.....	47
<i>Test de evaluare sumativă</i>	50
<i>Recapitulare și sistematizare prin teste</i>	52

GEOMETRIE

Capitolul 3. Elemente de geometrie în spațiu

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări	57
Lecția 2. Determinarea dreptei. Determinarea planului. Relații între puncte, drepte și plane	62
Lecția 3. Corpuri geometrice. Piramida.....	68
Lecția 4. Corpuri geometrice. Prisma	73
Lecția 5. Corpuri geometrice. Cilindrul circular drept. Conul circular drept	77
<i>Test de evaluare sumativă</i>	82
Lecția 6. Drepte paralele. Unghiul a două drepte în spațiu.....	84
Lecția 7. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan. Dreapta paralelă cu planul	89
Lecția 8. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele	93
Lecția 9. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă. Trunchiul de con	98

<i>Test de evaluare sumativă</i>	104
Lecția 10. Dreapta perpendiculară pe un plan. Distanțe în spațiu	107
Lecția 11. Înălțimile corpurilor geometrice studiate.....	112
Lecția 12. Plane perpendiculare. Secțiuni diagonale și axiale.....	119
<i>Test de evaluare sumativă</i>	124
Modele de teste pentru Evaluarea Națională	127
SOLUȚII	138

Teste de evaluare inițială

TESTUL 1

• Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I

(30 de puncte)

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Rezultatul calculului $\sqrt{2} - |-\sqrt{2}|$ este egal cu:
a. $\sqrt{4}$; b. $2\sqrt{2}$; c. 0; d. $-2\sqrt{2}$.
- 5p 2. Dacă $2x - 6 = -20$, atunci x este egal cu:
a. -6; b. -2; c. -8; d. -7.
- 5p 3. Dacă $a = 2 - \sqrt{8}$ și $b = -8 + 4\sqrt{2}$, atunci media aritmetică a numerelor a și b este egală cu:
a. $-3 + \sqrt{2}$; b. $-6 + 2\sqrt{2}$; c. $-3 - 6\sqrt{2}$; d. $-6 + 6\sqrt{2}$.
- 5p 4. Produsul dintre inversul numărului $\sqrt{3}$ și opusul numărului $\sqrt{3}$ este egal cu:
a. 1; b. -1; c. 3; d. -3.
- 5p 5. Dacă (x, y) este soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$, atunci $x - y$ este egal cu:
a. 0; b. -2; c. 2; d. 3.
- 5p 6. Fie mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{10}\}$. Atunci $\text{card}(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ este egal cu:
a. 7; b. 6; c. 8; d. 3.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Un pătrat are diagonala egală cu $3\sqrt{2}$ cm. Aria pătratului este egală cu:
a. 8 cm^2 ; b. 18 cm^2 ; c. 9 cm^2 ; d. 6 cm^2 .
- 5p 2. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$. Rezultatul calculului:
 $(\sin \sphericalangle B)^2 + (\cos \sphericalangle B)^2$ este egal cu:
a. 2; b. 4; c. 3; d. 1.
- 5p 3. Fie cercul $\mathcal{C}(O, R)$, $A, B \in \mathcal{C}(O, R)$, $AB = 4$ cm, $d(O, AB) = 3$ cm. Lungimea cercului este egală cu:
a. $2\pi\sqrt{13}$ cm; b. $2\pi\sqrt{5}$ cm; c. 6π cm; d. $2\pi\sqrt{7}$ cm.

- 5p 4. Fie triunghiul ABC , M mijlocul lui $[AB]$, $MN \parallel BC$, $N \in [AC]$. Atunci $\frac{\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{\mathcal{A}_{\triangle AMN}}$ este egal cu:
- a. $\frac{1}{4}$; b. 4; c. $\frac{1}{16}$; d. 16.
- 5p 5. Fie $ABCD$ un paralelogram, cu $\sphericalangle A = 30^\circ$, $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $AD = 4\sqrt{2}$ cm. Aria paralelogramului este egală cu:
- a. 24 cm^2 ; b. 12 cm^2 ; c. 6 cm^2 ; d. 8 cm^2 .
- 5p 6. Fie triunghiul ABC , $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $DE \parallel BC$, $AD = 2$ cm, $BD = 4$ cm, $BC = 18$ cm. Atunci DE este egal cu:
- a. 4 cm; b. 5 cm; c. 6 cm; d. 7 cm.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

Scrieți rezolvările complete.

1. După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 10 lei.
- 2p a) Este posibil ca prețul inițial să fie 6 lei? Justificați răspunsul.
- 3p b) Aflați prețul inițial al obiectului.
2. Fie $a = \sqrt{9} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + (-\sqrt{2})^3 - \frac{8}{\sqrt{2}} + (-6\sqrt{6}) : (-3\sqrt{3})$.
- 2p a) Demonstrați că $a = 3 - 10\sqrt{2}$.
- 3p b) Demonstrați că $a < -11$.
3. Fie ecuația $-3 \cdot (2x - 1) + 3x^2 = -6x + 30$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 2p a) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația.
- 3p b) Aflați $m \in \mathbb{R}$, știind că ecuația dată și ecuația $|x - m| = 3$ sunt echivalente.
4. Fie triunghiul ABC , M mijlocul lui $[BC]$, $BC = 10$ cm, $AM = 5$ cm, $AB = 6$ cm.
- 2p a) Calculați $\mathcal{A}_{\triangle ABC}$.
- 3p b) Calculați $d(A, BC)$.
5. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, $AC = 4$ cm.
- 2p a) Demonstrați că $\mathcal{P}_{ABCD} = 4(\sqrt{3} + 1)$ cm.
- 3p b) Dacă $E \in [AB]$, $AE = 1$ cm, $F \in [CE]$, cu $\frac{CF}{FE} = 2$, calculați BF .
6. Fie trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm, $\sphericalangle C = 45^\circ$.
- 2p a) Calculați \mathcal{A}_{ABCD} .
- 3p b) Calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$.

TESTUL 2

• Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I

(30 de puncte)

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Rezultatul calculului $|1 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} + 1$ este egal cu:
a. 2; b. 0; c. $\sqrt{8}$; d. $2\sqrt{2} + 2$.
- 5p 2. Dacă $\frac{x-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$, atunci x este egal cu:
a. -5; b. -4; c. $-\sqrt{2}$; d. -6.
- 5p 3. Fie numerele $a = \sqrt{144} - \sqrt{100}$ și $b = (\sqrt{2})^{-2}$. Media geometrică a numerelor a și b este egală cu:
a. $\sqrt{2}$; b. $\sqrt{4}$; c. 0; d. 1.
- 5p 4. În reperul cartezian xOy , fie punctul $A(3, 2)$, $B = \text{sim}_O A$, $C = \text{sim}_{Oy} B$. Atunci BC este egal cu:
a. 6; b. 2; c. 1; d. 4.
- 5p 5. Dacă (x, y) este soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -5x + 7y = 2 \end{cases}$, atunci $(x - y)^{30}$ este egal cu:
a. 2^{30} ; b. 1; c. 5^{30} ; d. 0.
- 5p 6. Fie ecuația $3x - 4y = -5$, cu $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $(a - 2, a + 2)$ este soluție a ecuației, atunci a este egal cu:
a. -9; b. -8; c. -10; d. -7.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Fie cercul $\mathcal{C}(O, R)$, AB tangentă la cerc, $A \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, R)$, $AO = 10$ cm, $\sphericalangle AOB = 60^\circ$. Cea mai lungă coardă în cerc are lungimea egală cu:
a. 5 cm; b. 8 cm; c. 10 cm; d. 12 cm.
- 5p 2. Fie $ABCD$ romb, cu $AC = 12$ cm, $BD = 16$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$, M mijlocul lui $[AB]$. Atunci OM este egal cu:
a. 10 cm; b. 8 cm; c. 5 cm; d. 4 cm.
- 5p 3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A , $BC = 10$ cm, $\sin \sphericalangle B = \frac{2}{5}$. Atunci lungimea proiecției lui AC pe BC este egală cu:
a. 1,3 cm; b. 1,4 cm; c. 1,5 cm; d. 1,6 cm.

- 5p** 4. Fie triunghiul ABC , BD bisectoarea unghiului B , $D \in AC$, $DE \parallel BC$, $BE = x \in \mathbb{N}$, $E \in AB$, $BC = 6$, $AE = 1$. Atunci x este egal cu:
a. 1; **b.** 3; **c.** 4; **d.** 2.
- 5p** 5. Fie triunghiul echilateral ABC , cu $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris acestui triunghi. Aria discului este egală cu:
a. $5\pi \text{ cm}^2$; **b.** $\frac{16\pi}{3} \text{ cm}^2$; **c.** $\frac{7\pi}{3} \text{ cm}^2$; **d.** $6\pi \text{ cm}^2$.
- 5p** 6. Fie triunghiul ABC , cu $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$, $\sphericalangle A = 30^\circ$. Atunci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}$ este egală cu:
a. 12 cm^2 ; **b.** 14 cm^2 ; **c.** 10 cm^2 ; **d.** 24 cm^2 .

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

Scrieți rezolvările complete.

1. Într-o clasă sunt 16 elevi, dintre care 4 sunt băieți.
- 2p** a) Pot fi 20% băieți?
- 3p** b) Cât la sută sunt fete?
2. Fie ecuația $\frac{x-1}{2} - \frac{3x-1}{3} = 2(5-6x)$.
- 2p** a) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația.
- 3p** b) Dacă x_0 este soluție a ecuației date, rezolvați în \mathbb{Z} ecuația:
- $$\sqrt{(x_0 - m)^2} = \frac{61}{69}.$$
3. Fie $a = (2 - \sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} - \frac{10}{\sqrt{5}} + (-\sqrt{80}) - |-2\sqrt{10} : \sqrt{5}| - (-\sqrt{2})^4 \cdot (-\sqrt{2})^6 : (-\sqrt{2})^9$.
- 2p** a) Demonstrați că $a = -10 - 2\sqrt{5} - \sqrt{2}$.
- 3p** b) Demonstrați că $|a| < 17$.
4. Fie dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $E \in AB$, $AE = 5 \text{ cm}$, $EF \perp AC$, $F \in (AC)$.
- 2p** a) Calculați \mathcal{P}_{ABCD} .
- 3p** b) Calculați $d(E, AC)$.
5. Fie triunghiul ABC , $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$, $BC = 13 \text{ cm}$, M mijlocul lui $[BC]$.
- 2p** a) Dacă $\mathcal{C}(O, R)$ este cercul circumscris triunghiului ABC , calculați lungimea cercului.
- 3p** b) Calculați $\mathcal{A}_{\Delta AMB}$.
6. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $\sphericalangle C = 45^\circ$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $AB = AD$, $\mathcal{A}_{ABCD} = 16 \text{ cm}^2$.
- 2p** a) Calculați AB .
- 3p** b) Dacă $E = \text{pr}_{DC} B$, demonstrați că patrulaterul $ABCE$ este paralelogram.

TESTUL 3

• Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I

(30 de puncte)

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Rezultatul calculului $\sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{25}$ este egal cu:
a. 0; b. 12; c. 2; d. $\sqrt{50}$.
- 5p 2. Media geometrică a numerelor 4 și 16 este egală cu:
a. 8; b. 10; c. 32; d. 16.
- 5p 3. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b\}$. Numărul de elemente al mulțimii $A \times B$ este egal cu:
a. 5; b. 6; c. 9; d. 8.
- 5p 4. Suma dintre opusul numărului $\frac{1}{2}$ și inversul numărului 2 este egală cu:
a. 1; b. 2; c. $\frac{5}{2}$; d. 0.
- 5p 5. Dacă 5 găini cântăresc cât 4 curci, iar 2 curci cântăresc cât o găscă, atunci 10 găște vor cântări cât:
a. 25 de găini; b. 50 de găini; c. 40 de găini; d. 20 de găini.
- 5p 6. Fie punctele $A(2, 3)$ și $B(b, -2)$, $b \in \mathbb{R}$. Dacă $AB = 5$, atunci b este egal cu:
a. -2; b. $\frac{1}{2}$; c. 0; d. 2.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Unghiul A al paralelogramului $ABCD$ are măsura egală cu $45^\circ 45'$. Măsura unghiului D este egală cu:
a. $44^\circ 15'$; b. $45^\circ 45'$; c. $134^\circ 15'$; d. $135^\circ 45'$.
- 5p 2. Un trapez are lungimile bazelor direct proporționale cu numerele 3 și 8. Dacă linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu 16,5 cm, atunci diferența dintre lungimea bazei mici și lungimea bazei mari este egală cu:
a. 33 cm; b. -5 cm; c. -15 cm; d. 15 cm.
- 5p 3. Dreptunghiul $MATE$, $MT \cap AE = \{X\}$, are lungimea unei diagonale egală cu 12 cm și $\sphericalangle MAX = 60^\circ$. Aria dreptunghiului $MATE$ este egală cu:
a. 144 cm^2 ; b. $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$; c. $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$; d. $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- 5p 4. Diametrul unui cerc cu aria de $484\pi \text{ m}^2$ are lungimea egală cu:
a. 22 cm; b. 44 cm; c. 242 cm; d. 484 cm.

- 5p 5. În triunghiul ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, G este centrul de greutate, iar $L \in (AC)$, astfel încât $GL \parallel BC$. Dacă $GL = 6$ dm, atunci AG are lungimea egală cu:
 a. 9 dm; b. 12 dm; c. 6 dm; d. 3 dm.
- 5p 6. Se consideră triunghiul echilateral MNP înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 6 \text{ cm})$. Aria triunghiului MOP este egală cu:
 a. $27\sqrt{3} \text{ cm}^2$; b. $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$; c. 36 cm^2 ; d. $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

Scrieți rezolvările complete.

1. Un elev și-a propus să rezolve în vacanță un set de probleme. Dacă ar rezolva câte 4 pe zi, i-ar rămâne 6 probleme nerezolvate. Dacă ar rezolva câte 5 pe zi, i-ar rămâne o zi liberă.
- 2p a) Este posibil ca setul să conțină 38 de probleme? Justifică răspunsul dat.
- 3p b) În câte zile și-a propus elevul să finalizeze setul de probleme?
2. Fie numerele reale:
- $$a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{4}{\sqrt{32}} \right) : \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ și } b = \sqrt{(3\sqrt{2} - 1)^2} - |4 - \sqrt{18}|.$$
- 2p a) Arătați că $a = 2$.
- 3p b) Calculați $\left(\frac{b}{3} - a \right)^{2024}$.
3. Se consideră, în reperul cartezian xOy , punctele $P(2, 3)$ și $Q(4, -5)$.
- 2p a) Dacă $M(a, b)$ este mijlocul segmentului PQ , arătați că $a + 3b = 0$.
- 3p b) Calculați lungimea segmentului determinat de simetricul punctului P față de O și simetricul punctului Q față de axa Ox .
4. În triunghiul ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, D și E sunt mijloacele laturilor AB , respectiv AC . Se cunosc $AC = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ și $DE = 4 \text{ cm}$.
- 2p a) Arătați că $\sphericalangle C = 30^\circ$.
- 3p b) Dacă $CD \cap BE = \{G\}$, calculați aria patrulaterului $AEGD$.
5. Fie paralelogramul $ABCD$, $AB = \frac{3}{2}BC = 12 \text{ cm}$ și punctul $E \in (AB)$.
- 2p a) Calculați perimetrul paralelogramului $ABCD$.
- 3p b) Dacă $CE \cap BD = \{M\}$ și $DE \cap AC = \{N\}$, demonstrați că $\frac{AN}{CN} + \frac{BM}{DM} = 1$.
6. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și punctul $C \in \mathcal{C}(O, r)$. Dacă AB este diametru și $AC = OA = 6 \text{ cm}$, atunci:
- 2p a) calculați $\text{ctg } \sphericalangle ABC$;
- 3p b) determinați aria porțiunii cuprinse între coarda BC și arcu mic subînțins de aceasta.

ALGEBRĂ

Capitolul 1 Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Mulțimile se notează cu litere mari.

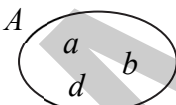
Elementele mulțimii se notează cu litere mici.

Moduri de definire a unei mulțimi:

1) O mulțime poate fi definită prin enumerarea elementelor sale.

Exemplu: $A = \{1, 8, 10\}$.

2) O mulțime poate fi definită prin diagrame Venn–Euler.

Exemplu:  Deci $A = \{a, b, d\}$.

3) O mulțime poate fi definită printr-o proprietate comună a elementelor ei.

Exemplu: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$. Deci $A = \{0, 1, 2\}$.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x \leq 1\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{2x} : 2\}$;

e) $E = \{\overline{2x} \mid \overline{2x} : 2\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x - 6 < 5\}$;

g) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < 2^x < 63\}$;

h) $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < x < 3\}$.

Soluții: a) $A = \{-1, 1\}$;

- b) $B = \{1, 2, 4, 8\}$;
 c) $C = \{2, 1, 0, -1, -2\}$;
 d) $D = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
 e) $E = \{20, 22, 24, 26, 28\}$;
 f) $2x < 6 + 5, 2x < 11 \mid : 2 \Rightarrow x < 5,5 \Rightarrow F = \{5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$;
 g) $2^0 < 2^x < 63 < 64 = 2^6 \Rightarrow 0 < x < 6 \Rightarrow G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
 h) $H = \emptyset$ (mulțimea vidă).

Observație. O mulțime M definită cu ajutorul unor proprietăți comune a elementelor ei se scrie $M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P\}$. Deci, mulțimea M este formată din elemente x . La mulțimea D , elementele mulțimii sunt numerele x și nu numerele $\overline{2x}$, cum greșesc mulți elevi.

2. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < 2x - 1 < 7\}$;

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \setminus \{3\} \mid \frac{-6}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{23x} : 3\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3y - 1, y \in \mathbb{N}, y < 3\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x < 1024\}$;

f) $F = \{3^x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x < 4\}$.

Soluții: a) $-3 < 2x - 1 < 7 \mid +1 \Rightarrow -2 < 2x < 8 \mid : 2 \Rightarrow -1 < x < 4 \Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3\}$;

b) $\frac{-6}{x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \mid -6 \Rightarrow x-3 \in D_{-6} \Leftrightarrow x-3 \in \{-6, 6, -3, 3, -2, 2, -1, 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{-3, 9, 0, 6, 1, 5, 2, 4\} = B$;

c) $C = \{1, 4, 7\}$;

d) Elementele mulțimii D sunt x , nu y ; $y < 3 \Rightarrow y \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow D = \{3 \cdot 0 - 1, 3 \cdot 1 - 1, 3 \cdot 2 - 1\} \Leftrightarrow D = \{-1, 2, 5\}$;

e) $8^x < 1024 \Rightarrow 2^{3x} < 2^{10} \Rightarrow 3x < 10 \Rightarrow x < \frac{10}{3} \Leftrightarrow x < 3, (3) \Rightarrow E = \{0, 1, 2, 3\}$;

f) $x < 4, x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow F = \{3, 3^2, 3^3\}; F = \{3, 9, 27\}$.

3. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{10}{x+2} \in \mathbb{N}\right\}$;

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{3x+1}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \sqrt{n} < 5\}$;

- d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| = 3\}$;
 e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < -4\}$;
 f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 16\}$;
 g) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 \text{ și } x : 4\}$.

Soluții: a) $\frac{10}{x+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+2 \mid 10, x+2 \in D_{10}; x+2 \in \{1, 2, 5, 10\} \Rightarrow x \in$

$\{-1, 0, 3, 8\} \cap \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 3, 8\} = A$;

b) $\frac{3x+1}{x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \mid 3x+1$, dar $x+1 \mid 3 \cdot (x+1); x+1 \mid 3x+3 \Rightarrow x+1 \mid 3x+$

$+3-3x-1, x+1 \mid 2, x+1 \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in \{0, 1\} = B$;

c) $1 \leq \sqrt{n} < 5 \Rightarrow 1^2 \leq \sqrt{n}^2 < 5^2, 1 \leq n < 25 \Rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, 24\}$;

d) $x-2=3 \Rightarrow x=5 \in \mathbb{Z}; x-2=-3, x=-1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow D = \{5, -1\}$;

e) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{Z}; -4 < 0 \Rightarrow E = \emptyset$;

f) $F = \{4\}$;

g) $x : 3 \text{ și } x : 4 \Rightarrow x : [3, 4], x : 12 \Rightarrow G = \{0, 12, 24, \dots, 12k, \dots\}, \forall k \in \mathbb{N}$.

3 CUM APLIC CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{5^x \mid x \text{ cifră pară și } x < 6\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 24\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x < 10\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 4\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 2\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{x-2} = 16\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \cdot (x-2) - 10 = 4\};$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 5\}.$$

2. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{5x \mid \overline{5x} : 5\};$$

$$B = \{k^2 + 3 \mid k \in \mathbb{N}^*, k < 3\};$$

$$C = \{x \mid x = 3^k - 1, k \in \mathbb{N}, 1 < k < 4\};$$

$$D = \{x \mid \overline{23x} : 10\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 7\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| = 11\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < 2^x < 130\};$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 6| = -5\}.$$

3. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x^2 < 25\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 2x = 3 \cdot (x + 2)\};$$

$$C = \{\overline{2x} \mid \overline{2x} : 9\};$$

$$D = \{10k + 1 \mid k = 2^n, n \in \mathbb{N}, n < 4\};$$

$$E = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{23}{x} \in \mathbb{N}\right\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 - 2x < 5\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x - 1 \leq 10\};$$

$$H = \{x \in \mathbb{N}^* \mid |x| < 4\}.$$

4. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2(x^2 - 3) - 6x = 8 - 6x\}; \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{3}\right\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2(x-2) - 3(x+2) = 8\}; \quad D = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x-1}{2} \leq -3\right\};$$

$$E = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+1}{4} \geq 5\right\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 > 31\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x^2} = 10\}.$$

5. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{\overline{3x} \mid \overline{3x} : 2 \text{ și } \overline{3x} : 3\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \mid 7\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < 3^x < 243\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 10| < -10\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 3| \geq 0\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| > -3\};$$

$$G = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2} - 2x = 3\right\}.$$

Standard consolidare

6. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < 2x - 3 < 13\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq 3x - 6 < 4\};$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq \frac{x-2}{3} < 3\right\};$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{Z} \setminus \{3\} \mid \frac{-11}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2(x-3) < 3 \cdot (x+3)\};$$

$$F = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6x+1}{7x-1} \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 4, x : 6, x : 8\}.$$

7. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 18 \text{ și } x \mid 24\};$$

$$B = \{\overline{12x} \mid \overline{12x} : 5 \text{ și } \overline{12x} : 3\};$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{(n+1)^2} < 10\};$$

$$D = \{\sqrt{x} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x \text{ cifră}\};$$

$$E = \{\sqrt{1ab} \mid \sqrt{1ab} \in \mathbb{Z}\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 18 \text{ și } x : 3\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x : 4 = 32\}.$$

8. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot (x + 1) = 12\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{x+2} + 2^x = 20\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 5^{x+1} < 626\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^{x+3} - 3^{x+2} + 3^x = 19\};$$

$$E = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \leq 5\right\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x < 30\};$$

$$G = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}\right\}.$$

9. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x+2} = 6\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{2x+1} \leq 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < 2\sqrt{x} < 8\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq \sqrt{x} - 2 \leq 10\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq |2x - 1| \leq 1\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x - 3) - 20 = -50 - 3x\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x + 64 = 0\}.$$

10. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}, \frac{x}{3} \in \mathbb{N}, \frac{x}{5} \in \mathbb{N}, x < 100\right\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 < 2x + 1 < -1\};$$

$$C = \left\{n \in \mathbb{N} \mid 1 < \frac{2n+1}{5} < 3\right\};$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{\overline{1x}}{5} \text{ este fracție reducibilă}\right\};$$

$$E = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{\overline{2x}}{3} \text{ este fracție ireducibilă}\right\};$$

$$F = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x+1} \text{ este fracție supraunitară}\right\};$$

$$G = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{50}{2x+2} \text{ este fracție echiunitară}\right\}.$$

11. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x+1} \text{ este fracție subunitară} \right\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 10, x \text{ par}\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid y \in \mathbb{N}, xy + x + y = 22\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} + 6 < 0\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid y \in \mathbb{N}, xy + x + y = 31\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{(x-3)^2} + 6 > 0\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{(2x-1)^2} < 2\}.$$

12. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot (n+1) : 2\};$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot (n+1)(n+2) : 6\};$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid (2^n + 3) : 2\};$$

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n = 4k - 3, k \in \mathbb{N}\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}, |2x-3| + |y+3| = 0\};$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{2}{x} < \frac{x}{8} \right\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid |2x+1| - |x+1| = 5\}.$$

13. Determinați mulțimile prin enumerarea elementelor lor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + y = 24, y \text{ prim}\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid y \in \mathbb{N}, xy - 5 = 6\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |3x - 5| = 2\};$$

$$D = \{2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{N}^*, a < 2, b < 2\};$$

$$E = \{5n + 2 \mid n \in \mathbb{N}, x^2 = 5n + 2, x \in \mathbb{N}\};$$

$$F = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}, x^2 = 4k + 3, x \in \mathbb{N}\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x \cdot 4^{2x} \cdot 2^x = 64\}.$$

Excelență (aprofundare)

14. Determinați mulțimea:

$$A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 4 + 20 + 36 + \dots + (16k - 12) = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}\}.$$

15. Determinați mulțimea:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}, n! + 2024 = 2^k\}, \text{ unde } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, 0! = 1.$$